III – Les suites

1) Définition

Une suite *(u_n)* est un ensemble de termes u_1, u_2, u_3 … un liés par une relation. Il est parfois possible de les calculer l'un après l'autre, parfois non.

Exemples :

a) Une suite que l'on peut calculer directement

Des grands-parents décident de donner à leur petite fille une chèque d'anniversaire correspondant à 10 fois son âge en années.

La suite *(u_n)* est donc définie par $u_n = 10 * n$ où u_n est le montant du cadeau et n l'âge de la petite fille en années.

On peut directement calculer le montant du cadeau pour les 15 ans de la petite fille :

$u_{15} = 10 * 15 = 150$ €

b) Une suite que l'on ne peut pas calculer directement

La population des marmottes dans un parc naturel dépend du nombre de petits qui survivent à chaque portée et de l'impact des prédateurs.

On considère que la population d'une année donnée dépend de celle de l'année précédente par la relation $u_{n+1} = 4*u_n – 300$.

Si en 2012 la population est de 110 individus, la suite *(v_n)* est définie par :

$\begin{cases} u_0=110 \\ u_{n+1}=4\times u_n-300 \end{cases}$ où n = (année courante – 2012) et u_n la population à l'année correspondante.

La population en 2013 est donc $u_1 = 4 * u_0 – 300 = 4 * 110 – 300 = 440 – 300 = 140$

La population en 2014 est donc $u_2 = 4 * u_1 – 300 = 4 * 140 – 300 = 560 – 300 = 260$

et ainsi de suite.

Il n'est donc pas possible de trouver directement la population à l'année 2018 sans calculer au préalable les années 2015, 2016 et 2017.

2) Sens de variation

Une suite *(u_n)* est dite croissante si ses termes u_1, u_2, u_3, …, u_{n-1}, u_n sont de plus en plus grands. Elle est dite décroissante dans le cas contraire.

Pour savoir si une suite est croissante, il suffit donc de savoir si $u_{n+1} > u_n$.

Cela revient étudier le signe de $u_{n+1} – u_n$.

Si $u_{n+1} – u_n > 0$ alors la suite est croissante, si $u_{n+1} – u_n < 0$ alors la suite est décroissante.

Exemple :

$(u_n):\begin{cases} u_0=110 \\ u_{n+1}=u_n+3 \end{cases}$ $u_{n+1} – u_n = (u_n + 3) – u_n = 3 > 0$
La suite *(u_n)* est croissante.

$(v_n):\begin{cases} v_0=-20 \\ v_{n+1}=v_n-n \end{cases}$ $v_{n+1} – v_n = (v_n - n) – v_n = -n < 0$ car $n\in\mathbb{N}$
La suite *(v_n)* est décroissante.

3) Suites particulières

a) Suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique si on ajoute toujours le même nombre pour passer d'un terme au suivant : $u_{n+1} = u_n + r$, le nombre « r » est appelé **la raison**.

Sens de variation :

- si r > 0 alors la suite est croissante.

- si $r < 0$ alors la suite est décroissante.

b) Suite géométrique

(vn) est une suite géométrique si l'on multiplie toujours par le même nombre pour passer d'un terme à l'autre : $v_{n+1} = q * v_n$, où q est le coefficient multiplicateur, appelé **la raison**.
Sens de variation :

- si $q > 1$:
  - si $u0 > 0$ la suite est croissante
  - si $u0 < 0$ la suite est décroissante
- si $0 \leq q < 1$:
  - si $u0 > 0$ la suite est décroissante
  - si $u0 < 0$ la suite est croissante
- $q < 0$: la suite est dite alternée (tantôt + tantôt -) et n'est ni croissante, ni décroissante.

Exemple : Une banque propose deux formules différentes pour rémunérer un livret d'épargne.
La formule A propose pour un dépôt initial de 1000€ un revenu constant de 80€ / an.
La formule B propose un taux constant de 4 % / an.

On voit dans la formule A que chaque année, 80€ s'ajoutent sur le compte. C'est donc une suite arithmétique de raison 80 et de premier terme 1000, soit :

$$(u_n):\begin{cases} u_0=1000 \\ u_{n+1}=u_n+80 \end{cases}$$

Dans la formule B, la relation est $v_{n+1}=v_n+\frac{4\times v_n}{100}=1{,}04\times v_n$, la suite est donc géométrique de raison 1,04.

$$(v_n):\begin{cases} v_0=1000 \\ v_{n+1}=1{,}04\times v_n \end{cases}$$