I – Fonction et polynôme de degré 2

1) Définition

Une fonction polynôme est une fonction de la forme $f : x \rightarrow a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$

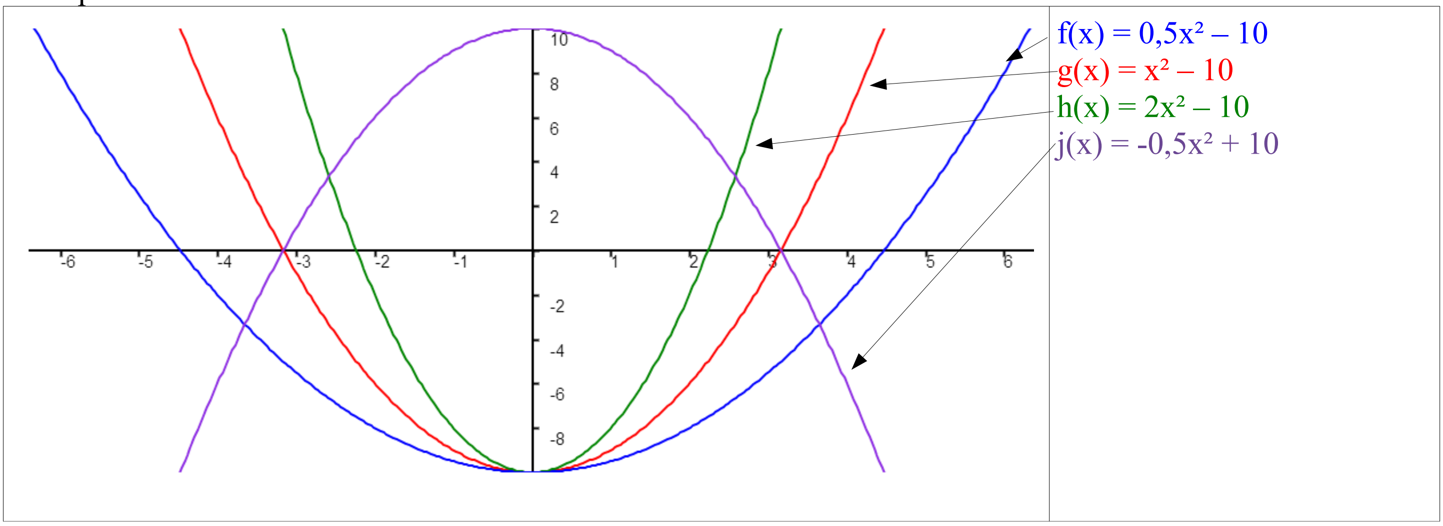
Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction de la forme $f : x \rightarrow a.x^2 + b.x + c$ avec $a \neq 0$

2) Aspect

Tous les polynômes ont une courbe représentative formant une parabole. Cette parabole est d'autant plus « ouverte » que le coefficient a est proche de 0.

La parabole est tournée vers le haut si a est positif et vers le bas dans le cas contraire.

Exemples :



3) Résolution d'équation

a. Résolution graphique

Résoudre l'équation f(x)=0 revient à chercher pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses. Dans le cas d'un polynôme de degré 2 il y a 3 possibilités :

- la courbe ne coupe jamais l'axe des abscisses : il n'y a pas de solution
- la courbe tangente l'axe des abscisses : une solution unique
- la courbe coupe l'axe des abscisses en 2 points : 2 solutions

a. Forme canonique

Si la fonction polynôme est écrite sous la forme $f(x) = a*(x-s_1)(x-s_2)$ alors les solutions de l'équation f(x)=0 sont les nombres s_2 et s_2

b. Discriminant delta

On montre que le fait que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a ou non des solutions dépend du discriminant $delta = \sqrt{(b^2 - 4ac)}$. Delta est une lettre de l'alphabet grec qui correspond au « d » latin et qui s'écrit « Δ » en majuscule et « δ » en minuscule.

- Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution
- Si $\Delta = 0$ alors il n'y a qu'une seule solution
- Si $\Delta \geq 0$ il y a deux solutions : $s_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $s_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

4) Extremum

L'extremum d'une fonction correspond au maximum ou au minimum d'une fonction. On utilise ce terme lorsque l'on ne sait pas forcément à l'avance si ce que l'on calcule correspond au minimum ou au maximum.

L'extremum d'une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est atteint lorsque $x = \frac{-b}{2a}$.

Si a est positif alors $f(\frac{-b}{2a})$ correspond à la valeur minimale de la fonction, si a est négatif, cela correspond au maximum de la fonction.

5) Tangente
La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près au voisinage de ce point. Son coefficient directeur indique à la fois le sens de variation de la courbe, mais également la « vitesse » à laquelle la courbe augmente.

Rappel : calculer le coefficient directeur d'une droite
Choisir intelligemment* deux points $A(x_a,y_a)$ et $B(x_b,y_b)$ de la droite. Le coefficient directeur de la droite a pour valeur $a=\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}$

Remarque 1: on montre que l'équation de cette tangente est alors $T(x)=\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}*x+(y_b-\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a})$

Remarque 2 : la valeur $y_b-\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}$ correspond à l'ordonnée de l'intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées.

La formule générale de la tangente à f en a est $T_a(x) = f'(a)\ (x-a) + f(a)$

Exemple : Soit la fonction $f(x)= 2x^2 - 3x +2$, et on veut calculer l'expression de la tangente à sa courbe représentative en $x_a=1$
a : On calcule $f(x_a)$
$f(x_a) = f(1) = 2*(1)^2 – 3*1 + 2 = 1$
b : On trouve l'expression de la dérivée $f'(x)$
Ici est une fonction polynôme de degré 2, de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$.
Sa dérivée est de donc de la forme $f'(x) = 2ax + b = 2*2x + (-3) = 4x -3$
c : On calcule $f'(x_a)$
$f'(x_a) = 4*1 – 3 = 1$
d : On applique la formule de la tangente
$T_a(x) = f'(a)\ (x-a) + f(a) \rightarrow T_1(x)=f'(1)\ (x-1) + f(1)$
$T_a(x) = 1*(x-1) + 1 = x – 1 + 1 = x$
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en x=1 est donc la droite d'équation y=x.

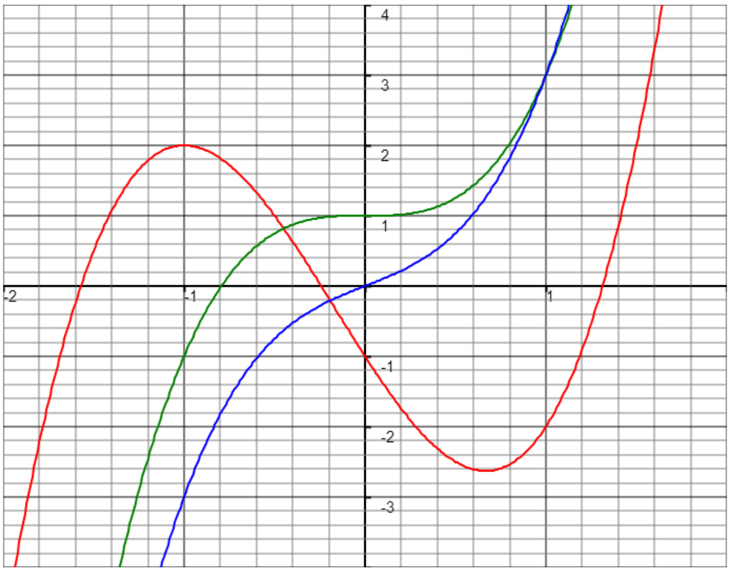
6) Dérivée
Lorsque l'on dispose de la formule du polynôme, il est possible de calculer directement la valeur du coefficient directeur sans avoir à tracer la courbe représentative. On utilise pour cela la dérivée de la fonction f notée f ' (f prime).
a. Relation entre f et f '.
si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors $f'(x) = 2ax + b$
$f'(x)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x.

Exemple : soit $f(x) = 3x^2 -2x + 5$ et C_f sa courbe représentative.
Calculer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse x=2.
1- Calcul de $f'(x) = 6x – 2$
2- $f'(2) = 6*2 -2 = 10$
Le coefficient directeur de la tangente à Cf au point d'abscisse x=2 vaut 10.

7) Sens de variation
Etudier le sens de variation d'une fonction revient à étudier le signe de sa dérivée.
Si la dérivée est positive, la fonction est croissante et si la dérivée est négative elle est décroissante.
Dans le cas d'une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a $f'(x) = 2ax + b$
or si on cherche $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2ax+b=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b}{2a}$
La tableau des signe de f ' est donc :

Si a < 0						Si a > 0					
x	-∞		$\frac{-b}{2a}$		+∞	x	-∞		$\frac{-b}{2a}$		+∞
f '(x)		+	0	-		f '(x)		-	0	+	
f(x)		↗		↘		f(x)		↘		↗	

II – Fonction polynôme de degré 3
1) Définition
Une fonction polynôme de degré 3 peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Exemple : la fonction $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x -1$ est un polynôme de degré 3 avec comme coefficients
a = 2 ; b = 1 ; c = -4 et d = -1.
2) Représentation



$f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x -1$
$g(x) = 2x^3 + 1$
$h(x) = 2x^3 + x$
On remarque que contrairement aux fonctions polynôme de degré 2, le sens de variation peut changer, il faudra donc systématiquement étudier les variations de la fonction pour pouvoir la représenter.

3) Dérivée
La dérivée f ' d'une fonction polynôme de degré 3 de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est de la forme
$f'(x) = 3\,ax^2 + 2\,bx + c$

Exemple : $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x -1$ donc a = 2 ; b = 1 ; c = -4 ; d = -1
$f'(x) = 3\,ax^2 + 2\,bx + c = 3*2\,x^2 + 2*1\,x -4$
$f'(x) = 6x^2 + 2x -4$

4) Etude des variations
Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de sa dérivée :

si f ' < 0 alors f est décroissante
si f ' > 0 alors f est croissante

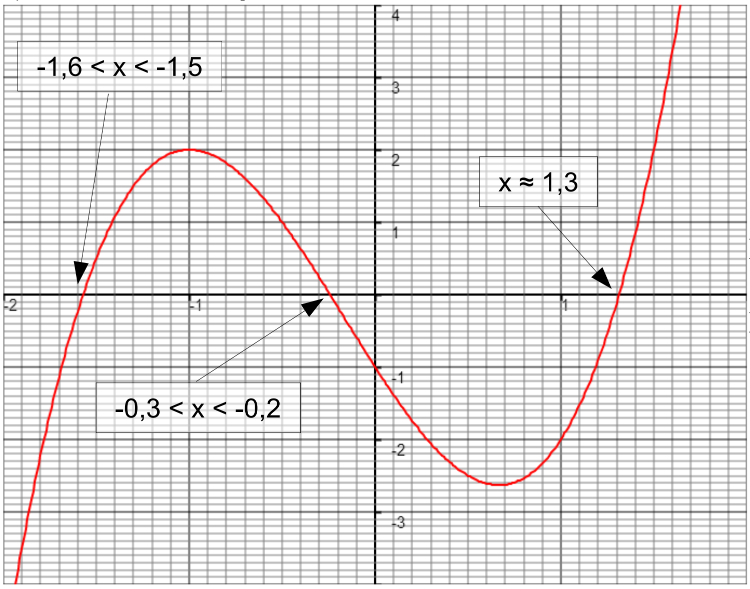
Il faut donc étudier le signe de la dérivée pour connaître le sens de variation de la fonction.
Exemple : $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x -1$ donc $f'(x) = 6x^2 + 2x -4$
f ' est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = 6 ; b = 2 et c = -4
donc delta = $b^2 - 4ac = 2^2 - 4*6*(-4) = 4 + 96 = 100$

L'équation f '(x) = 0 admet donc 2 solutions dans $\mathbb{R}$
s1 = -1 et s2 = 2/3 = 0,667.
Comme le coefficient « a » est positif, f ' est négative entre s1 et s2 et positive en dehors.
Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		-1		2/3		$+\infty$
Signe de f '		+	0	-	0	+	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2,63	$\nearrow$	$+\infty$

Il suffit ensuite de calculer les valeurs de f (-1) et f (2/3)
$f(-1) = 2*(-1)^3 + (-1)^2 - 4*(-1) - 1 = -2 + 1 + 4 - 1 = 2$
$f(2/3) = 2*(2/3)^3 + (2/3)^2 - 4*(2/3) - 1 = 16/27 + 4/9 - 8/3 - 1 = -71/27 \approx -2,63$

5) Solutions de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$



Contrairement aux polynômes de degré 2, toute équation de cette forme admet au moins une solution.

Mais elle peut également avoir 2 ou 3 solutions.

Il n'existe malheureusement pas de formule générale pour résoudre une équation de degré 3, il faut donc se contenter d'utiliser les valeurs approchées trouvées par résolution graphique