Les polynômes 6 – Les suites 2

<u>Exercice 1 :</u> Etude d'une fonction
Soit la fonction f : $x \to -x^3 + 2x^2 + 3x - 1$
1- Compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
f(x)=	9	2,375	-1	-1,875	-1	0,875	3	4,625	5	3,375	-1	-8,875	-21

2- A l'aide de la calculatrice, déterminer les solutions de l'équation f(x)=0.
$s_1 = -1{,}20$; $s_2 = 0{,}29$; $s_3 = 2{,}91$
3- Etude des variations de f.

a) Déterminer l'expression de f '(x)
$f'(x) = -3x^2 + 4x + 3$
b) Trouver les solutions de l'équation f '(x) = 0
$\Delta = 52 \to s_1 = -0{,}54$; $s_2 = 1{,}87$
c) Réaliser le tableau des signes de f '(x) et des variations de f(x)

x		s_1		s_2	
f '(x)	-	0	+	0	-
f(x)	$\searrow$	-1,88	$\nearrow$	5,06	$\searrow$

d) Calculer les valeurs des deux extrema locaux de f.
e) Tracer la fonction f pour x $x \in [-2 ; 4]$

<u>Exercice 2 :</u> Calculer des suites numériques
La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 3\,v_n^2 + 1$
1- Calculer les termes v_1, v_2, v_3
$v_1 = 3\,v_0^2 + 1 = 4$; $v_2 = 3\,v_1^2 + 1 = 49$; $v_3 = 3\,v_2^2 + 1 = 7204$
2- Calculer le huitième terme de la suite.
Il y a plusieurs façons de le faire : comme au 1- ou alors en utilisant intelligemment la calculatrice !
On commence par taper la première valeur puis on appuie sur « entrée », de cette façon la calculatrice garde la première valeur en mémoire dans « Ans » ou « Rép ».
On tape ensuite la relation v_{n+1} en remplaçant v_n par « Ans » ou « Rép ».
Dans notre cas cela donne :
« 1 » puis « entrée » puis « 3*Rép² + 1 » puis « entrée ». Les chiffres suivants obtenus en appuyant sur « entrée » sont les valeurs v_2, v_3, v_4 ...
On trouve finalement le 8ème terme $v_7 = 7{,}55 * 10^{68}$.
Attention au piège, il fallait compter V_0 ! De toute façon v_8 est trop grand pour être affiché par votre calculatrice...

<u>Exercice 3 :</u> Dans un étang, pendant l'hiver 2011, la population des gardons était estimée à 600kg. Mais chaque année la quantité des gardons diminue du quart de sa valeur. Pour compenser sa diminution, on introduit chaque année 200kg de gardons.
On note u_n la quantité de gardons, exprimée en kilogrammes, au début de l'hiver de l'année 2011+n.
On a ainsi $u_0 = 600$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 3/4\ u_n + 200$.
1- Déterminer la quantité de gardon u_1 de gardons présents à l'hiver 2012, puis la quantité de gardons u_2 à l'hiver 2013.
C'est la même démarche qu'à l'exercice précédent : $u_1 = 3/4\ u_0 + 200 = 650$; $u_2 = 3/4\ u_1 + 200 = 687{,}5$;
$u_3 = 3/4\ u_2 + 200 = 715{,}625$
2- Déterminer à la calculatrice la quantité de gardons présents à l'hiver 2025.
2025 correspond à 2011 + 14, donc n = 14. $u_{14} = 796{,}4$ kg

<u>Exercice 4 :</u> Le 1er janvier 2013, Ahmed dépose 1000 € sur un compte rémunéré à 4 % d'intérêts annuels.
Chaque 1er janvier à partir de 2014, il dépose 300 € supplémentaires sur le livret. On note C_0 le capital de départ en euros, puis pour tout entier naturel non nul, C_n est le capital de l'année 2013 + n.
1- Calculer C_1, le capital au 1er janvier 2014, puis le capital C_2.
Toujours le même calcul !
$C_1 = 1{,}04 * 1000 + 300 = 1340$ € ; $C_2 = 1{,}04 * 1000 + 300 = 1693{,}6$ €
2- Donner l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
On remarque que pour trouver la valeur de l'année suivante, on multiplie l'année en cours par 1,04 et on ajoute 300, donc : $C_{n+1} = 1{,}04 * C_n + 300$
3- A l'aide de la calculatrice, déterminer le capital disponible au 1er janvier 2025.

Encore pareil 2025 = 2013 + 12, on cherche donc C_{12} = 6108,77€

Exercice 5 : étudier le sens de variation des suites suivantes en utilisant $u_{n+1} - u_n$.

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

$U_{n+1} - U_n = U_n + n^2 - U_n = n^2 > 0$

Un carré est toujours positif, donc la suite *(Un)* est croissante.

$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$

$U_{n+1} - U_n = U_n - n^2 - U_n = - n^2 < 0$

La suite est décroissante.

$\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n - 7n \end{cases}$

$U_{n+1} - U_n = U_n - 7n - U_n = - 7n < 0$

comme n>0, la suite est forcément décroissante.

Exercice 6 : Le salaire annuel d'embauche d'un employé est de 20 000 €. Son contrat prévoit une augmentation annuelle de 3 %. On note u_0=20 000 son salaire en euros la première année et pour tout entier naturel n non nul, u_n le salaire annuel au bout de n années.

1- Calculer u_1.

$u_1 = 1{,}03 * u_0 = 20600$.

2- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis dire si la suite est croissante ou non.

$u_{n+1} = 1{,}03 * u_n$ → comme on multiplie par un nombre plus grand que 1 un nombre positif, la suite (u_n) est croissante.

3- A l'aide de la calculatrice :

a) Déterminer le salaire annuel au bout de 20 ans.

Même démarche, on trouve 36122€ / an.

b) Déterminer au bout de combien d'année le salaire aura doublé.

Même démarche, on trouve que le salaire aura doublé au bout de 24 ans.

4- Refaire les question précédentes avec le salaire d'un ingénieur de la même entreprise et embauché avec un salaire annuel de 30 000 €. Conclusion ?

Au bout de 20 ans, le salaire sera de 54183€.

Le salaire aura doublé au bout de 24 ans.

On remarque que le salaire double au bout de la même durée, quel que soit le salaire de départ.